INSTITUTO FEDERAL
SÃO PAULO
Campus Cubatão

Disciplina: Sistemas de Controle 1 - SCOE6

Prof. Marcelo Coelho

2019/2

Análise de Estabilidade – Critério de Routh-Hurwitz

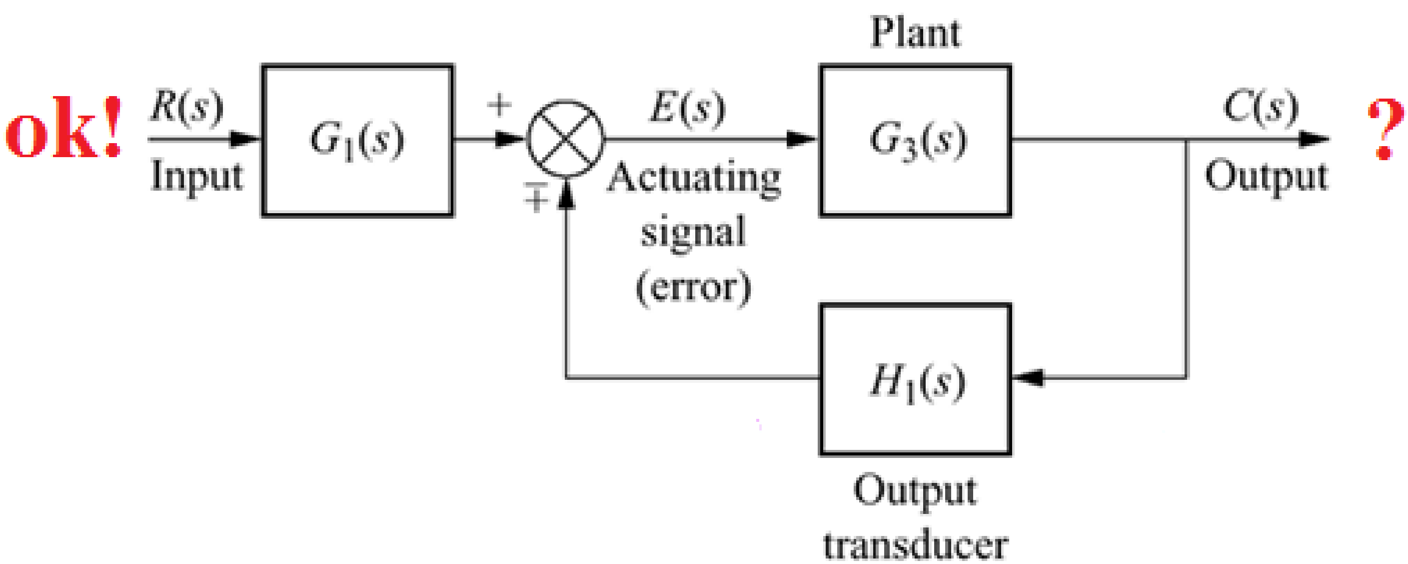
Versão 08-set-2019

HOJE

1. Introdução aos Sistemas de Controle. Malha fechada versus malha aberta.
2. Modelagem no domínio da frequência: Funções de transferência.
3. Diagramas de blocos.
4. Análise da Resposta Transitória e de regime estacionário no domínio do tempo: sistemas de primeira, de segunda ordem e de ordem superior. Dominância de polos num sistema de ordem superior.
5. Análise de Estabilidade.
6. Critério de Routh-Hurwitz.
7. Análise de erros em regime permanente em sistemas de controle. Aplicação do Teorema do Valor Final.
8. Análise do lugar das raízes: o gráfico do lugar das raízes, regras gerais para a construção do lugar das raízes.
9. Projeto de compensadores segundo o Método do Lugar das Raízes: compensação por avanço de fase, compensação por atraso de fase, compensação por atrase e avanço de fase, compensação em paralelo.

INTRODUÇÃO

Estabilidade é o mais importante requisito de um sistema, pois sistemas instáveis não podem ser projetados para atenderem uma resposta transitória específica ou um determinado estado estacionário.



INTRODUÇÃO

Limitaremos a análise a sistemas lineares e invariantes no tempo. Estudamos que as respostas dos sistemas são compostas por duas parcelas:

$$c(t) = c_{forçada}(t) + c_{natural}(t)$$

A) Considerando a resposta natural, as seguintes definições de estabilidade, instabilidade e estabilidade marginal são aplicáveis:

1. Um sistema é estável se a resposta natural tende a zero a medida que o tempo tende a infinito;
2. Um sistema é instável se a resposta natural aumenta de forma ilimitada a medida que o tempo tende a infinito e;
3. Um sistema é marginalmente estável se a resposta natural nem decresce nem cresce, mas permanece constante ou oscila a medida que o tempo tende a infinito.

INTRODUÇÃO

Pode ser difícil determinar a estabilidade de um sistema se não for observada facilmente a parcela natural na resposta total do sistema.

B) Um alternativa é determinar a estabilidade **em termos da entrada e da saída:**

Se a entrada é limitada (não possuí valores tendendo a infinito) e se a saída do sistema não tende a infinito a medida que o tempo tende a infinito, então a o sistema é estável.

A definição acima é conhecida como **BIBO** (*bounded input, bounded output*)

Obs.: Se a entrada for infinita, não pode-se concluir nada sobre a estabilidade do sistema.

INTRODUÇÃO

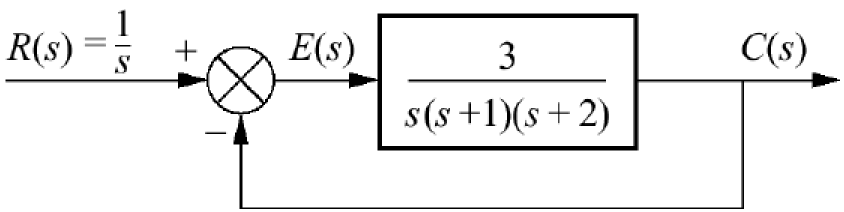
C) Em relação ao plano s, polos dos sistemas em malha fechada, localizados no semi plano lateral esquerdo, produzem respostas naturais que decrescem a medida que o tempo tende a infinito ou, partindo do ponto de vista da instabilidade: **sistemas instáveis possuem pelo menos um polo no semiplano lateral direito ou polos com multiplicidade maior que 1 sobre o eixo imaginário**.

Neste contexto, sistemas em malha fechada que possuem polo de multiplicidade 1 sobre o eixo imaginário, produzem respostas senoidais, sendo o sistema classificado como marginalmente estável, a não ser no caso da entrada ser senoidal, com mesma frequência que os polos sobre o eixo imaginário, sendo o sistema, para tal condição, instável.

INTRODUÇÃO

Exemplo: sistema com entrada em degrau e diferentes condições de estabilidade.

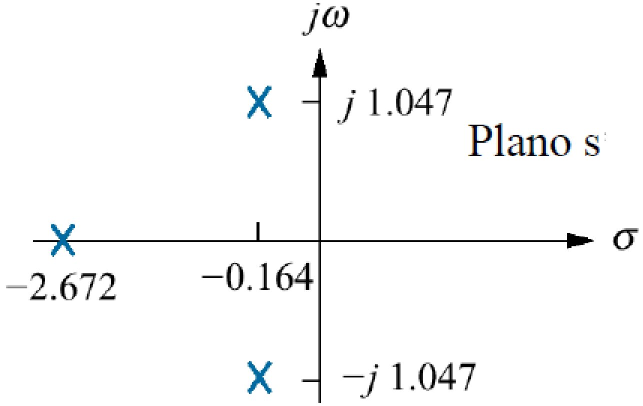
$$T(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)H(s)} = \frac{3/s(s+1)(s+2)}{1+3/s(s+1)(s+2)}$$



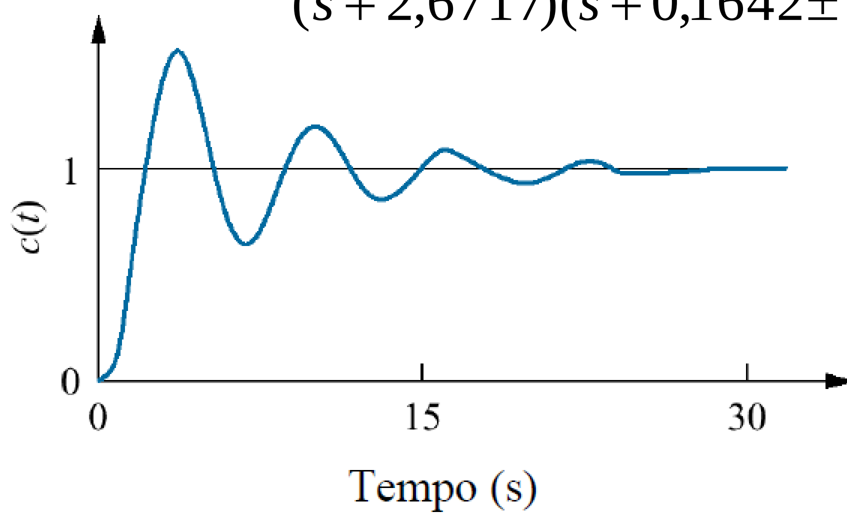
$$T(s) = \frac{3}{s^3+3s^2+2s+3}$$

$$T(s) = \frac{3}{(s+2{,}6717)(s+0{,}1642 \pm j1{,}0469)}$$

Sistema estável

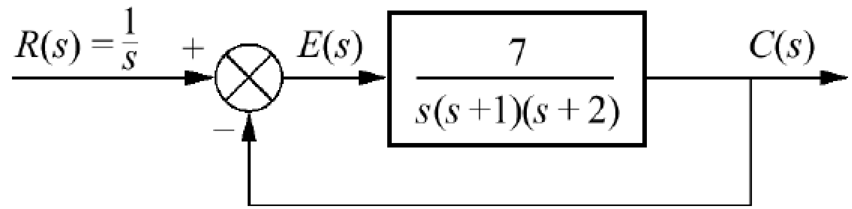


Pólos do sistema a malha fechada estáveis (fora de escala)



INTRODUÇÃO

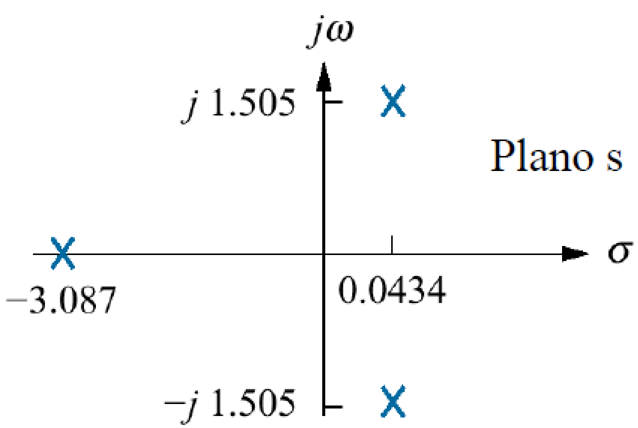
Exemplo: sistema com entrada em degrau e diferentes condições de estabilidade.



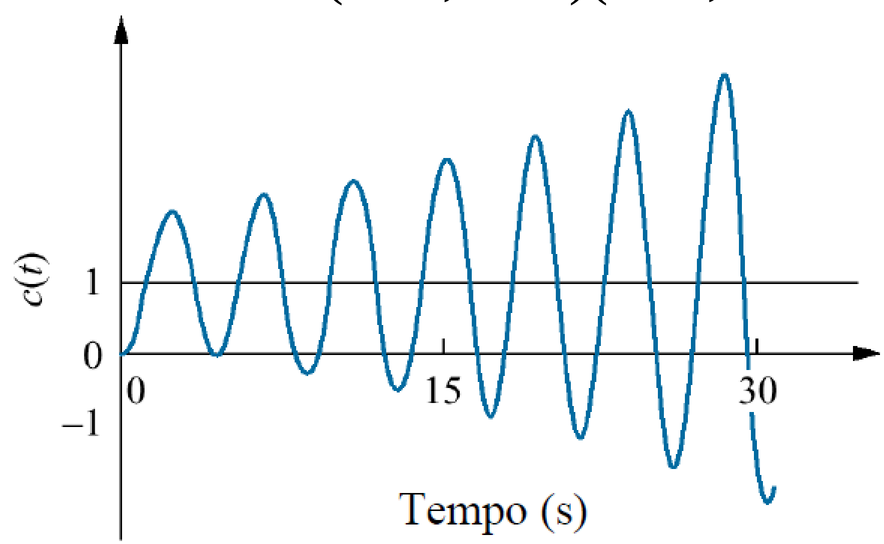
$$T(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)H(s)} = \frac{7/s(s+1)(s+2)}{1+7/s(s+1)(s+2)}$$

$$T(s) = \frac{7}{s^3+3s^2+2s+7}$$

$$T(s) = \frac{7}{(s+3{,}0867)(s-0{,}0434 \pm j1{,}5053)}$$



Pólos do sistema a malha fechada instáveis (fora de escala)



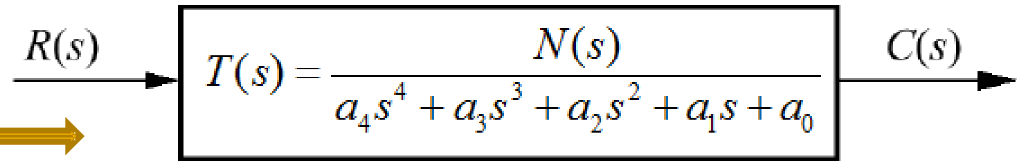
INTRODUÇÃO

O método de RH (Routh-Hurwitz) indica quantos pólos de malha fechada se localizam no SPLD, sem fornecer sua localização exata, ou seja, não fornece as coordenadas dos polos.

$$R(s) \longrightarrow \boxed{T(s) = \frac{N(s)}{a_4 s^4 + a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0}} \longrightarrow C(s)$$

CRITÉRIO DE ROUTH-HURWITZ

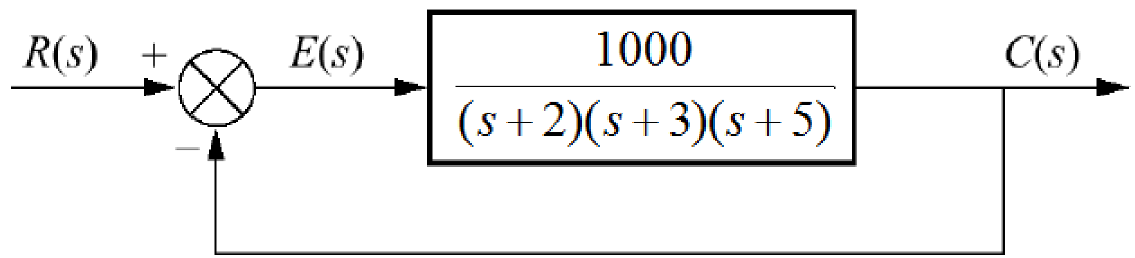
Tabela de RH básica: considere um sistema em malha fechada com a função de transferência T(s):

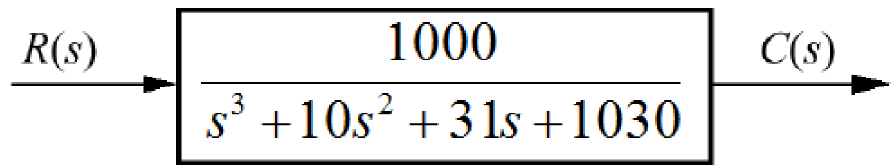


$$
\begin{array}{c|ccc}
s^4 & a_4 & a_2 & a_0 \\
s^3 & a_3 & a_1 & 0 \\
\hline
s^2 & \dfrac{-\begin{vmatrix} a_4 & a_2 \\ a_3 & a_1 \end{vmatrix}}{a_3}=b_1 & \dfrac{-\begin{vmatrix} a_4 & a_0 \\ a_3 & 0 \end{vmatrix}}{a_3}=b_2 & \dfrac{-\begin{vmatrix} a_4 & 0 \\ a_3 & 0 \end{vmatrix}}{a_3}=b_3=0 \\
s^1 & \dfrac{-\begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}}{b_1}=c_1 & \dfrac{-\begin{vmatrix} a_3 & 0 \\ b_1 & 0 \end{vmatrix}}{b_1}=c_2=0 & \dfrac{-\begin{vmatrix} a_3 & 0 \\ b_1 & 0 \end{vmatrix}}{b_1}=c_3=0 \\
s^0 & \dfrac{-\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & 0 \end{vmatrix}}{c_1}=d_1 & \dfrac{-\begin{vmatrix} b_1 & 0 \\ c_1 & 0 \end{vmatrix}}{c_1}=d_2=0 & \dfrac{-\begin{vmatrix} b_1 & 0 \\ c_1 & 0 \end{vmatrix}}{c_1}=d_3=0
\end{array}
$$

CRITÉRIO DE ROUTH-HURWITZ

Exemplo: Considere um sistema representado pelo diagrama de blocos ao lado. Determine a Tabela de RH para tal sistema.





$$
\begin{array}{c|ccc}
s^3 & 1 & 31 & 0 \\
s^2 & 10/10 & 1030/10 & 0/10 \\
\hline
s^1 & -\dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 31 \\ 1 & 103 \end{vmatrix}}{1} = -72 & -\dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}}{1} = 0 & -\dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}}{1} = 0 \\
s^0 & -\dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 103 \\ -72 & 0 \end{vmatrix}}{-72} = 103 & -\dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -72 & 0 \end{vmatrix}}{-72} = 0 & -\dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -72 & 0 \end{vmatrix}}{-72} = 0
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{cccc}
s^3 & 1 & 31 & 0 \\
s^2 & 1 & 103 & 0 \\
s^1 & -72 & 0 & 0 \\
s^0 & 103 & 0 & 0
\end{array}
$$

CRITÉRIO DE ROUTH-HURWITZ

Critério de RH: o número de raízes de um polinômio que estão no semi plano lateral direito do plano s é igual ao número de mudanças de sinal da **primeira coluna** da Tabela de RH.

Exemplo 1: Considere um sistema que possui a equação característica mostrada ao lado (sendo $q(s)$ a equação do denominador de $T(s)$).

$$q(s) = s^3 + s^2 + 2s + 8$$

$$\begin{array}{c|cc} s^3 & 1 & 2 \\ s^2 & 1 & 8 \\ \hline s^1 & -\dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 8 \end{vmatrix}}{1} = -6 & 0 \\ s^0 & -\dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 8 \\ -6 & 0 \end{vmatrix}}{-6} = 8 & \end{array}$$

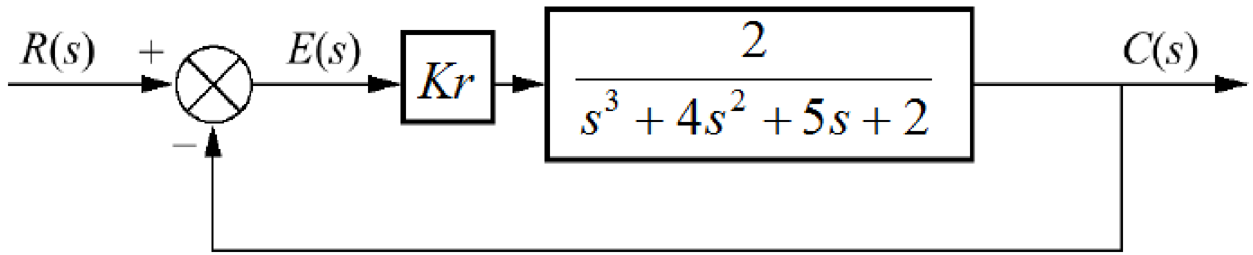
$$\begin{array}{ccc} s^3 & 1 & 2 \\ s^2 & 1 & 8 \\ s^1 & -6 & 0 \\ s^0 & 8 & \end{array}$$

Há duas mudanças de sinal na primeira coluna, logo, dois polos no semi plano lateral direto (SPLD), portanto, **sistema instável!**

CRITÉRIO DE ROUTH-HURWITZ

CASO GERAL

Exemplo 2: Considere um sistema representado pelo diagrama de blocos abaixo. Projetar a faixa de valores do ganho *Kr* para que o sistema permaneça estável.



$$T(s)=\frac{\dfrac{2Kr}{s^3+4s^2+5s+2}}{1+\dfrac{2Kr}{s^3+4s^2+5s+2}}$$

$$T(s)=\frac{2Kr}{s^3+4s^2+5s+2+2Kr}$$

CASO GERAL

Exemplo 2: Continuação...

$$T(s) = \frac{2Kr}{s^3 + 4s^2 + 5s + 2 + 2Kr}$$

$$\begin{array}{c|cc}
s^3 & 1 & 5 \\
s^2 & 4 & 2+2Kr \\
\hline
s^1 & -\dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 2+2Kr \end{vmatrix}}{4} = \dfrac{18-2Kr}{4} & 0 \\
s^0 & -\dfrac{\begin{vmatrix} 4 & 2+2Kr \\ \dfrac{18-2Kr}{4} & 0 \end{vmatrix}}{\dfrac{18-2Kr}{4}} = 2+2Kr &
\end{array}$$

$$18 - 2Kr > 0$$

$$-2Kr > -18$$

$$Kr < 9$$

$$Kr > -1$$

$$\boxed{-1 < Kr < 9}$$

CASO COM ZERO APENAS NA PRIMEIRA COLUNA:

$$T(s) = \frac{10}{s^5 + 2s^4 + 3s^3 + 6s^2 + 5s + 3}$$

Exemplo 3:
Considere um sistema representado pela função de transferência ao lado. Determine se o sistema é estável usando o critério de RH.

$$\begin{array}{c|ccc}
s^5 & 1 & 3 & 5 \\
s^4 & 2 & 6 & 3 \\
\hline
s^3 & -\dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{vmatrix}}{2} = 0 & -\dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}}{2} = 7/2 & -\dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}}{2} = 0 \\
s^2 & -\dfrac{\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 0 & 7/2 \end{vmatrix}}{0} = !!! & & \\
s^1 & & & \\
s^0 & & &
\end{array}$$

CASO COM ZERO APENAS NA PRIMEIRA COLUNA:

Ex.3: continuação...

Quando há um resultado zero na primeira coluna, e há valores diferentes de zero no restante da linha, substitui-se o valor zero por uma variável ε , prosseguindo a construção da tabela:

$$
\begin{array}{c|ccc}
s^5 & 1 & 3 & 5 \\
s^4 & 2 & 6 & 3 \\
\hline
s^3 & -\dfrac{\begin{vmatrix}1 & 3\\ 2 & 6\end{vmatrix}}{2} = \emptyset = \varepsilon & -\dfrac{\begin{vmatrix}1 & 5\\ 2 & 3\end{vmatrix}}{2} = 7/2 & -\dfrac{\begin{vmatrix}1 & 0\\ 2 & 0\end{vmatrix}}{2} = 0 \\
s^2 & -\dfrac{\begin{vmatrix}2 & 6\\ \varepsilon & 7/2\end{vmatrix}}{\varepsilon} = \dfrac{6\varepsilon - 7}{\varepsilon} & -\dfrac{\begin{vmatrix}2 & 3\\ \varepsilon & 0\end{vmatrix}}{\varepsilon} = 3 & 0 \\
s^1 & \dfrac{42\varepsilon - 49 - 6\varepsilon^2}{12\varepsilon - 14} & 0 & 0 \\
s^0 & 3 & &
\end{array}
$$

CASO COM ZERO APENAS NA PRIMEIRA COLUNA:

Ex.2: continuação... Análise do sinal da primeira coluna:

	1º coluna	$\varepsilon \to +0$	$\varepsilon \to -0$
s^5	1	$+$	$+$
s^4	2	$+$	$+$
s^3	ε	$+$	$-$
s^2	$\dfrac{6\varepsilon-7}{\varepsilon}$	$-$	$+$
s^1	$\dfrac{42\varepsilon-49-6\varepsilon^2}{12\varepsilon-14}$	$+$	$+$
s^0	3	$+$	$+$

Há duas trocas de sinal, portanto, o sistema possui dois polos no SPLD, logo, **o sistema é instável**.

CRITÉRIO DE ROUTH-HURWITZ

CASO COM UMA LINHA INTEIRA DE ZEROS:

Exemplo 4: Considere um sistema que contém a seguinte equação característica mostrada ao lado. Determine se o sistema é estável ou não.

$$Q(s) = s^3 + s^2 + s + 1$$

$$\begin{array}{c|cc} s^3 & 1 & 1 \\ s^2 & 1 & 1 \\ \hline s^1 & -\dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{1} = 0 & 0 \\ s^0 & & \end{array}$$

$$\frac{d\left(s^2+1\right)}{ds} = 2s$$

$$\begin{array}{c|cc} s^3 & 1 & 1 \\ s^2 & 1 & 1 \\ \hline s^1 & 2 & 0 \\ s^0 & -\dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}}{2} = 1 & \end{array}$$

Quando toda a linha é nula, volta-se na linha anterior e deriva-se seus termos, substituindo o resultado na linha inicialmente nula.

Sem mudança de sinal na primeira coluna, portanto o sistema é estável.

INSTITUTO FEDERAL
SÃO PAULO
Campus Cubatão

CRITÉRIO DE ROUTH-HURWITZ

CASO COM UMA LINHA INTEIRA DE ZEROS:

Exemplo 5: Considere um sistema que contém a seguinte equação característica mostrada ao lado. Determine se o sistema é estável ou não.

$$Q(s) = s^4 - 1$$

$$\begin{array}{c|ccc} s^4 & 1 & 0 & -1 \\ s^3 & 0 & 0 & 0 \\ \hline s^2 & & & \\ s^1 & & & \\ s^0 & & & \end{array} \Rightarrow \frac{d\left(s^4 - 1\right)}{ds} = 4s^3$$

$$\Rightarrow \begin{array}{c|ccc} s^4 & 1 & 0 & -1 \\ s^3 & 4 & 0 & 0 \\ \hline s^2 & -\dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 0 \end{vmatrix}}{4} = 0 & -\dfrac{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 0 \end{vmatrix}}{4} = -1 & \\ s^1 & & & \\ s^0 & & & \end{array}$$

INSTITUTO FEDERAL
SÃO PAULO
Campus Cubatão

CASO COM UMA LINHA INTEIRA DE ZEROS:

Exemplo 5: Continuação.....

$$\begin{array}{c|ccc}
s^4 & 1 & 0 & -1 \\
s^3 & 4 & 0 & 0 \\
\hline
s^2 & \emptyset = \varepsilon & -1 & 0 \\
s^1 & -\dfrac{\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ \varepsilon & -1 \end{vmatrix}}{\varepsilon} = \dfrac{4}{\varepsilon} & 0 & \\
s^0 & -\dfrac{\begin{vmatrix} \varepsilon & -1 \\ \frac{4}{\varepsilon} & 0 \end{vmatrix}}{\frac{4}{\varepsilon}} = -1 & &
\end{array}$$

Há uma troca de sinal, portanto, o sistema possui um polo no SPLD, logo, **o sistema é instável**.

Exercícios Sugeridos (Nise) Cap. 6 – 7ª Edição

Problemas: 1; 6; 7(ML); 9; 10(ML); 15; 16(ML); 42 e 56

Os problemas estão a partir da página 266

Exercícios Sugeridos (Nise) Cap. 6 – 7ª Edição

Problema 7(ML)

Program:

```
den=[1 1 -6 0 1 1 -6]
A=roots(den)
```

Computer response:

```
den =
1 1 -6 0 1 1 -6
A =
-3.0000
2.0000
-0.7071 + 0.7071i
-0.7071 - 0.7071i
0.7071 + 0.7071i
0.7071 - 0.7071i
```

Exercícios Sugeridos (Nise) Cap. 6 – 7ª Edição

Problema 10(ML)

Program:

```
numg=240;
deng=poly([-1 -2 -3 -4]);
'G(s)'
G=tf(numg,deng)
'Poles of G(s)'
pole(G)
'T(s)'
T=feedback(G,1)
'Poles of T(s)'
pole(T)'
```

Computer response:

```
ans =

G(s)

Transfer function:
               240
----------------------------------
s^4 + 10 s^3 + 35 s^2 + 50 s + 24

ans =

Poles of G(s)

ans =

   -4.0000
   -3.0000
   -2.0000
   -1.0000
```

```
T(s)

Transfer function:
               240
-----------------------------------
s^4 + 10 s^3 + 35 s^2 + 50 s + 264

ans =

Poles of T(s)

ans =

  -5.3948 + 2.6702i
  -5.3948 - 2.6702i
   0.3948 + 2.6702i
```

Exercícios Sugeridos (Nise) Cap. 6 – 7ª Edição

Problema 16(ML)

Program:

```
numg=8;
deng=[1 -2 -1 2 4 -8 -4 0];
'G(s)'
G=tf(numg,deng)
'T(s)'
T=feedback(G,1)
'Poles of T(s)'
pole(T)
```

Computer response:

```
ans =

G(s)


Transfer function:
                              8
------------------------------------------------------------
s^7 - 2 s^6 - s^5 + 2 s^4 + 4 s^3 - 8 s^2 - 4 s


ans =
```

Exercícios Sugeridos (Nise) Cap. 6 – 7ª Edição

Problema 16(ML)

Program:

```
numg=8;
deng=[1 -2 -1 2 4 -8 -4 0];
'G(s)'
G=tf(numg,deng)
'T(s)'
T=feedback(G,1)
'Poles of T(s)'
pole(T)
```

```
T(s)

Transfer function:
                              8
---------------------------------------------------------
s^7 - 2 s^6 - s^5 + 2 s^4 + 4 s^3 - 8 s^2 - 4 s + 8


ans =

Poles of T(s)


ans =

  -1.0000 + 1.0000i
  -1.0000 - 1.0000i
  -1.0000
   2.0000
   1.0000 + 1.0000i
   1.0000 - 1.0000i
   1.0000
```

CRITÉRIO DE ROUTH-HURWITZ

EXERCÍCIO: Considere um sistema que contém a equação característica mostrada abaixo. Determine a faixa de valores de *Kp* e *Ki* para que o sistema seja estável.

$$Q(s) = s^4 + 4s^3 + 5s^2 + (2 + 2Kp)s + 2Ki$$

Obs.: Ao analisar o termo dependente de *Kp* e *Ki*, escolher Kp = 3 e determinar as faixas de valores das constantes para o sistema ser estável.